Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS, groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d’un chariot et étude de sa vitesse** (12 questions) — **Page 3**
2. **Probabilités et estimation statistique dans la fabrication de tubes et de rivets** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsit.fr/assets/annales/bts-it/E2 - Mathématiques/2022/BTS IT - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot et étude de sa vitesse

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m·s⁻¹ lorsque son système de freinage est activé, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. L’exercice mobilise les équations différentielles, l’étude d’une fonction exponentielle, le calcul d’une distance par intégration, un développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle homogène (E₀) : y′ + 0,8y = 0.

La formule fournie pour une équation de la forme $y' + ay = 0$ donne directement les solutions. Ici, le coefficient est $a = 0,8$, donc l’exponentielle est $e^{-0,8t}$. La constante multiplicative peut être n’importe quel réel, puisque l’équation est homogène. On obtient ainsi toutes les solutions sur l’intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l’équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.

1. La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$.
2. En remplaçant y et y' dans le membre de gauche de (E), on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L’égalité est vérifiée pour tout $t \geq 0$, donc g est bien une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.

On connaît les solutions de l’équation homogène associée : $y_h(t) = ke^{-0,8t}$. De plus, $g(t) = 5$ est une solution particulière de l’équation complète. Toute solution de celle-ci s’obtient en ajoutant cette solution particulière à une solution de l’équation homogène. La constante k est arbitraire et réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l’équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale trouvée précédemment est $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$.

2. À $t = 0$, la condition initiale impose $ke^0 + 5 = 20$. Comme $e^0 = 1$, on obtient $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on détermine la fonction correspondant à la vitesse initiale du chariot.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. À partir de l'expression de f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t}$ tend vers 0, et le terme $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0. Dans l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, il ne reste donc à la limite que le terme constant.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, et donner une équation de cette asymptote.

> La courbe représentative d'une fonction qui tend vers une limite finie en $+\infty$ admet une asymptote horizontale en cette limite. Ici, la limite déterminée à la question précédente est 5. L'équation de l'asymptote s'écrit donc en égalant l'ordonnée à cette valeur.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale de C : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression donnée de f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, la dérivée donnée est toujours négative. La fonction f est donc strictement décroissante. Elle commence à $f(0) = 20$ et tend vers 5 à l'infini.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow$ 5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Le terme $15e^{-0,8t}$ est donc lui aussi strictement positif, ce qui donne :

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$ à tout instant fini ;
- la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et non vers 0.

Le modèle ne prévoit donc pas l'arrêt du chariot.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans atteindre 0.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la dérivation de l'exponentielle composée, $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est précisément celle de $f(t)$. La relation caractéristique d'une primitive est donc vérifiée sur l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. La distance d parcourue entre les instants t₀ et t₁ est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la distance exacte parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Par le théorème fondamental de l'analyse, $d = F(1) - F(0)$. On a $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. Ainsi, la distance exacte est $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation numérique, arrondie au centimètre, donne la distance demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}.$

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, choisir l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

La partie régulière affichée sur la page est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Comme $\frac{24}{5} = 4,8$, la proposition correcte est celle qui ajoute à ces termes $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. La question ne demande aucune justification à recopier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. La valeur initiale est $f(0) = 20$. Avec la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Probabilités et estimation statistique dans la fabrication de tubes et de rivets

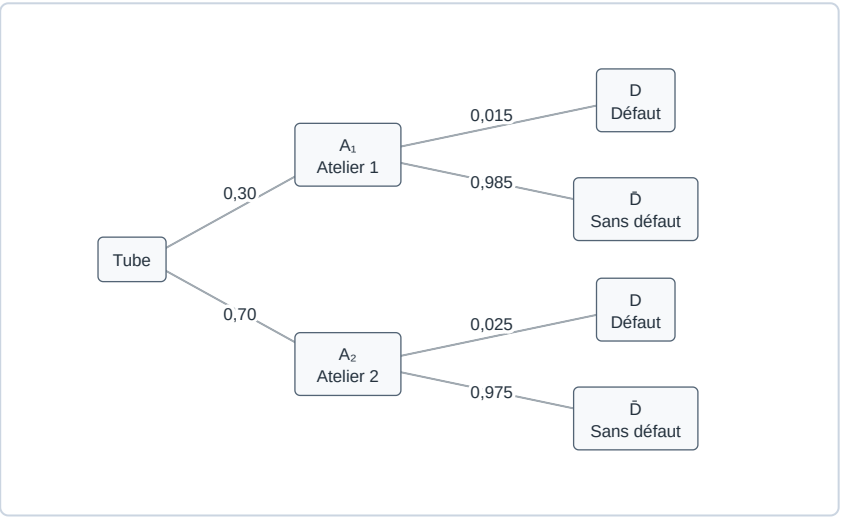
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers qui ont des parts de production et des taux de défaut distincts. L'exercice étudie les probabilités associées aux défauts, la durée de fonctionnement des tubes modélisée par une loi exponentielle, puis l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des parts de production et des taux de défaut des deux ateliers, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

La première séparation suit les parts de production. Depuis chaque atelier, on distingue les tubes défectueux et conformes. Les probabilités de conformité sont les complémentaires des taux de défaut : $1 - 0,015 = 0,985$ et $1 - 0,025 = 0,975$.

Production des tubes et défauts



Probabilités de production puis probabilités conditionnelles de défaut ou de conformité.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré ci-dessous.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit P(A₁ ∩ D).

On multiplie la part de production de l'atelier 1 par son taux conditionnel de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Cela représente 0,45 % de la production totale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.

Les deux ateliers couvrent toute la production. Par la formule des probabilités totales :

Atelier	Contribution aux tubes défectueux
1	$0,30 \times 0,015 = 0,0045$
2	$0,70 \times 0,025 = 0,0175$

En additionnant ces contributions, on obtient $P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022$, soit 2,2 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la part provenant de l'atelier 2 parmi tous les tubes sans défaut. La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$, tandis que $P(\overline{D}) = 1 - 0,022 = 0,978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825 / 0,978 \approx 0,6979$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée T de bon fonctionnement d'un tube suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$. Avec $\lambda = 0,001$, on obtient $E(T) = 1/0,001 = 1\,000$ heures. C'est la durée moyenne de bon fonctionnement sur un grand nombre de tubes, et non la durée garantie d'un tube particulier.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé au hasard soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour $t = 8\,000$ et $\lambda = 0,001$, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9996645$. La loi étant continue, les probabilités pour $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ sont identiques. On arrondit au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1,00$.

Question 3. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé au hasard soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de dépasser t heures est $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ et $\lambda = 0,001$, $P(T > 10\,000) = e^{-0,001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0,0000454$. Arrondie au centième, elle vaut 0,00.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0,00$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

L'estimation ponctuelle est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon : $\hat{p} = 975/1\,000 = 0,975$. Elle estime la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion de rivets conformes, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle au millième.**

La formule fournie s'applique avec $f = 0,975$ et $n = 1\,000$. La marge est $1,96\sqrt{0,975(1-0,975)/1\,000} \approx 0,009677$. Les bornes sont donc $0,975 - 0,009677 \approx 0,965323$ et $0,975 + 0,009677 \approx 0,984677$. Arrondies au millième, elles donnent $0,965$ et $0,985$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de deux heures et de coefficient 2, sauf en Traitement des matériaux où il est de 3. Le sujet étudie le freinage d'un chariot, la conformité et la durée de vie de tubes fluorescents, puis la conformité de rivets. Il évalue équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet de résoudre l'équation complète.
- Si f(t) tend vers une limite finie L lorsque t tend vers $+\infty$, la courbe de f admet l'asymptote horizontale $y = L$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance fourni est centré sur la fréquence f et a pour marge $1{,}96\sqrt{f(1 - f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale $f(0) = 20$ pour déterminer la constante de la solution de l'équation différentielle.
- Ne pas confondre une vitesse qui tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$ avec une vitesse qui atteint zéro : la limite permet de répondre à la question sur l'arrêt.
- Dans l'arbre, multiplier les probabilités le long d'une branche et additionner les probabilités des branches correspondant à l'événement demandé.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée et l'effectif $n = 1\,000$, puis arrondir les deux bornes au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage ?

Résoudre d'abord l'équation homogène $y' + 0{,}8y = 0$, puis ajouter une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale $f(0) = 20$ permet ensuite de déterminer la constante et la fonction vitesse.

Q : Comment calculer la probabilité d'une provenance sachant que le tube n'a pas de défaut ?

Divisez la probabilité conjointe de l'atelier 2 et de l'absence de défaut par la probabilité totale d'absence de défaut. L'arbre pondéré permet d'identifier les probabilités des branches utiles au calcul.

Q : Comment choisir la formule de probabilité pour la durée de vie ?

Avec une loi exponentielle de paramètre λ, utilisez $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour une durée inférieure à t et $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour une durée supérieure. Vérifiez que t est exprimé dans la même unité que λ.

Q : Quels arrondis et éléments de présentation sont attendus ?

Respectez les précisions indiquées : probabilités de durée au centième, distance au centimètre et bornes de l'intervalle de confiance au millième. Indiquez les unités, présentez les calculs demandés et interprétez l'espérance dans le contexte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsit.fr/assets/annales/bts-it/E2 - Mathématiques/2022/BTS IT - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Innovation Textile : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.