Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS INNOVATION TEXTILE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Étude d'un système électrique à l'aide de la transformée de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsit.fr/assets/annales/bts-it/E2 - Mathématiques/2022/BTS IT - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ ralentit sous l'effet d'un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction f du temps. L'exercice étudie l'équation différentielle du modèle, les variations et la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

On met l'équation sous la forme *y'=-0,8y*. La formule donnée pour une équation homogène *y'+ay=0* indique que ses solutions sont des exponentielles *y(t)=ke^{-at}*, où *k* est une constante réelle. Ici, *a=0,8*. La famille obtenue est bien définie et dérivable sur l'intervalle *[0;+∞[*.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$**, avec** $k \in \mathbb{R}$**.**

Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction *g* est constante, donc sa dérivée est nulle. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation différentielle, on obtient :

- *g'(t)=0* ;
- *g'(t)+0,8g(t)=0+0,8×5=4*.

L'égalité demandée est vérifiée pour tout *t≥0*. La fonction constante proposée est donc une solution particulière de l'équation différentielle complète.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ **est une solution de** $y' + 0,8y = 4$**.**

Question 1. c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La différence entre une solution de l'équation complète et la solution particulière *g(t)=5* vérifie l'équation homogène associée. D'après la question précédente, cette différence est de la forme *ke^{-0,8t}*, avec *k* réel.

On ajoute donc cette solution homogène à la solution particulière pour obtenir toutes les solutions de l'équation sur *[0;+∞[*.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$**, avec** $k \in \mathbb{R}$**.**

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est *y(t)=ke^{-0,8t}+5*. À *t=0*, l'exponentielle vaut *e^0=1*. La condition initiale devient donc *k+5=20*, ce qui fixe la constante de la solution. En remplaçant *k* par sa valeur dans la solution générale, on obtient le modèle de vitesse du chariot pendant le freinage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. **À partir de l'expression f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.**

Quand *t\to+∞*, on a *-0,8t\to-∞*, donc *e^{-0,8t}\to0*. En utilisant l'expression de la fonction, le terme *15e^{-0,8t}* tend lui aussi vers zéro. Le terme constant ne varie pas. La limite de *f(t)* est donc la somme de zéro et de cinq, ce qui démontre le résultat demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.**

La courbe de *f* admet une asymptote horizontale en +∞ lorsque la limite de la fonction en +∞ est finie. Or la limite établie à la question précédente vaut *5*. L'ordonnée de cette droite est donc constante et égale à cette limite. Il s'agit de l'asymptote horizontale de la courbe *C*.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Asymptote horizontale :** $y = 5$.

Question 2. **Sachant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.**

Comme une exponentielle est strictement positive, *f'(t)=-12e^{-0,8t}* est négative sur tout l'intervalle. La fonction est donc strictement décroissante. Elle commence en *f(0)=20* et tend vers *5* en +∞.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.**

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle. Or, pour tout temps fini *t≥0*, l'exponentielle *e^{-0,8t}* est strictement positive. On en déduit que :

- *15e^{-0,8t}>0* ;
- *f(t)=15e^{-0,8t}+5>5*.

La vitesse tend vers *5* sans atteindre zéro : le système ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.**

Question 4. a. Vérifier que F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive *F(t)=-18,75e^{-0,8t}+5t*. La dérivée de l'exponentielle composée est *-0,8e^{-0,8t}*, donc :

$F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5.$

Cette expression est exactement celle de *f(t)*. Ainsi, la dérivée de *F* étant *f* sur l'intervalle considéré, *F* est une primitive de *f*.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.**

Question 4. b. En utilisant l'intégrale de la vitesse, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse entre *0* et *1*. Avec la primitive donnée, on calcule *d=F(1)-F(0)*. Or *F(1)=-18,75e^{-0,8}+5* et *F(0)=-18,75*. La différence donne la valeur exacte ci-contre ; son évaluation arrondie au centimètre est également indiquée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \text{m} \approx 15,33\ \text{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte, et aucune justification n'est demandée.

La partie régulière affichée par le logiciel est *20-12t+$\frac{24}{5}$t²*. À l'ordre deux, le reste doit s'écrire sous la forme *t²ε(t)*, où *ε(t)\to0* lorsque *t\to0*. Parmi les propositions, seule la troisième conserve le terme linéaire, le terme quadratique et un reste de cette forme. C'est donc celle qu'il faut recopier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, **avec** $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse zéro a pour équation *y=f(0)+f'(0)(t-0)*. La fonction vaut *20* en zéro. À partir de la dérivée donnée, on obtient *f'(0)=-12e^0=-12*. La tangente passe donc par le point *(0;20)* et a pour pente *-12*. On remplace ces deux valeurs dans la formule.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Étude d'un système électrique à l'aide de la transformée de Laplace

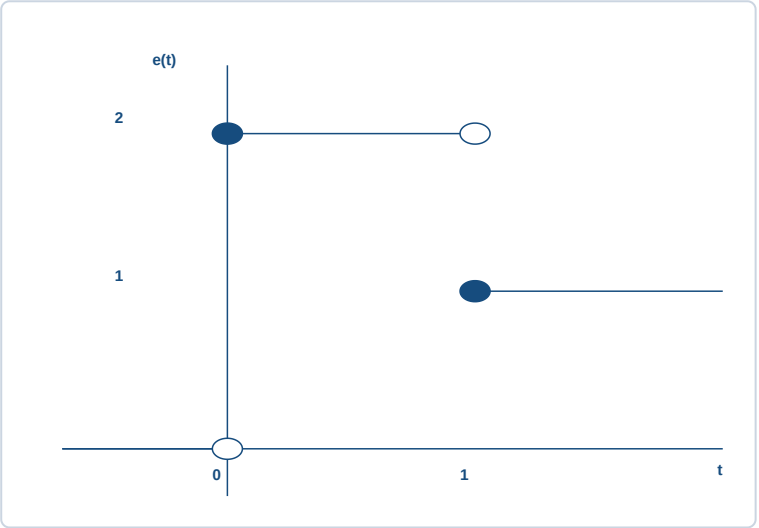
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) − U(t − 1), avec une fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice porte sur la représentation de l'entrée, le calcul de la sortie par transformée de Laplace et l'étude de cette sortie à partir de t = 1 et à l'infini.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est causal, donc il est nul pour t < 0. Pour t ≥ 0, on utilise U(t) = 1. Avant t = 1, U(t − 1) = 0 et e(t) vaut 2. À partir de t = 1, U(t − 1) = 1 et e(t) vaut 1. Ainsi, e(0) = 2 et e(1) = 1. Les points aux sauts sont donc à placer selon ces valeurs.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t) = 0 pour t < 0, 2 pour 0 ≤ t < 1 et 1 pour t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

La transformée de Laplace de U(t) est 1/p. La formule du formulaire donne celle de U(t − a) : e^{-ap}/p. On applique cette formule avec a = 1 au second échelon, puis on utilise la linéarité de la transformation pour traiter la différence des deux signaux.

Ainsi, la contribution de 2U(t) est 2/p et celle de U(t − 1) est e^{-p}/p.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La transformée de Laplace du signal d'entrée est $E(p) = (2 - e^{-p})/p$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que $S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^{-p}$.

La relation donnée entre les transformées est $S(p) = H(p)E(p)$. D'après l'énoncé, $H(p) = 1/(p + 1)$, et la transformée du signal d'entrée est $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$.

$$S(p) = 1/(p + 1) \times (2/p - e^{-p}/p) = 2/[p(p + 1)] - e^{-p}/[p(p + 1)].$$

On obtient bien l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^{-p}/[p(p + 1)]$, comme demandé.

Question 2. Vérifier l'égalité $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$.

Pour vérifier l'égalité, on réduit le membre de droite au dénominateur commun $p(p + 1)$. Le numérateur devient $(p + 1) - p$, qui se simplifie en 1. On retrouve ainsi exactement le membre de gauche, pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux membres sont égaux : $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de $1/p$, de $1/(p + 1)$, de e^{-p}/p et de $e^{-p}/(p + 1)$, en utilisant le formulaire.

Le formulaire donne directement les transformées usuelles et la propriété de retard. Pour les termes multipliés par e^{-p}, le retard vaut une unité : le signal obtenu est nul avant $t = 1$, puis prend la forme initiale décalée.

- $1/p$: $U(t)$; $1/(p + 1)$: $e^{-t}U(t)$.
- e^{-p}/p : $U(t - 1)$; $e^{-p}/(p + 1)$: $e^{-(t - 1)}U(t - 1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé, les inverses sont $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t - 1)$ et $e^{-(t - 1)}U(t - 1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

En utilisant la décomposition vérifiée à la question précédente, on écrit $S(p) = 2(1/p - 1/(p + 1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p + 1))$. Les inverses des termes retardés contiennent $U(t - 1)$, donc ils sont nuls pour $0 \leq t < 1$. Il ne reste que la première différence, multipliée par 2.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur l'intervalle $0 \leq t < 1$, l'expression du signal de sortie est $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. Sachant que $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$ sur $[1 ; +\infty[$, calculer $s(1)$, puis donner sa valeur exacte et une valeur approchée au dixième.

On remplace t par 1 dans l'expression donnée pour $t \geq 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, on obtient $s(1) = (e - 2)/e + 1$. En regroupant les termes, cela donne $2 - 2/e$. L'évaluation numérique vaut environ 1,2642, ce qui s'arrondit au dixième à 1,3.

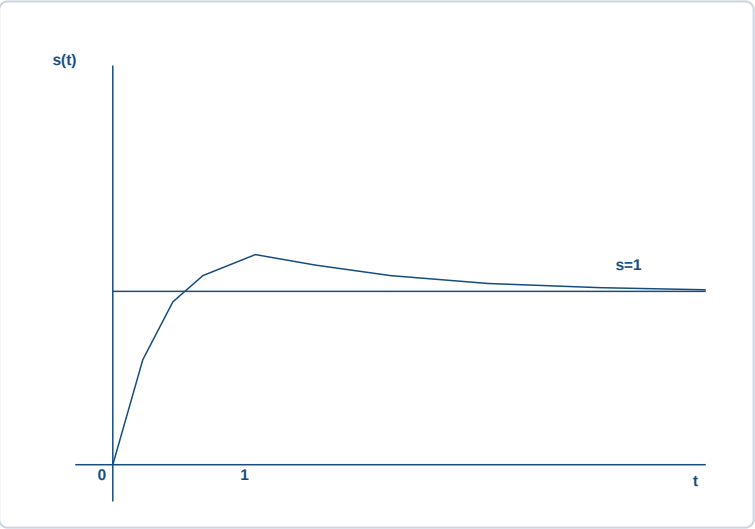
✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur exacte est $s(1) = 2 - 2/e$; au dixième, $s(1) \approx 1{,}3$.

Question 5. b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0 ; 1[$, la sortie $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ croît de 0 à $2 - 2/e$. À $t = 1$, les deux expressions de s donnent la même valeur. Ensuite, $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$ décroît et se rapproche de 1 par valeurs supérieures. La courbe doit donc présenter un maximum en $t = 1$, puis tendre vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracer une courbe croissante jusqu'au point $(1 ; 2 - 2/e)$, puis décroissante vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Question 5. c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression donnée est $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers +∞, e^{-t} tend vers 0. Le coefficient $e - 2$ est constant, donc le produit $(e - 2)e^{-t}$ tend également vers 0. Il reste alors le terme constant de l'expression pour déterminer la limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite du signal de sortie lorsque t tend vers +∞ est égale à 1.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS INNOVATION TEXTILE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2022, code 22MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, et évaluent équations différentielles, fonctions, intégration et transformée de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L à l'infini, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{[t_0,t_1]} f(t)\,dt$.
- En transformée de Laplace, $f(t-a)U(t-a)$ correspond à $F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : vitesse en $m \cdot s^{-1}$, temps en secondes et distance en mètres.
- Pour le tableau de variation, étudier le signe de la dérivée et indiquer les valeurs aux bornes ainsi que la limite.
- Appliquer le facteur exponentiel e^{-ap} aux signaux retardés dans les transformations de Laplace.
- Pour les tracés sur le document-réponse, tenir compte des changements de signal aux instants 0 et 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de freinage ?

Résoudre d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajouter une solution particulière de l'équation complète. La condition f(0) = 20 détermine la constante et permet d'obtenir la fonction vitesse.

Q : Comment traiter le retard U(t − 1) dans une transformée de Laplace ?

La fonction U(t − 1) a pour transformée e^{-p}/p. Plus généralement, le signal retardé $f(t-a)U(t-a)$ a pour transformée $F(p)e^{-ap}$, conformément au formulaire fourni dans le sujet.

Q : Comment gérer le temps et les points pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de dix points chacun. Les trois parties de l'exercice 1 peuvent être traitées indépendamment, ce qui permet de poursuivre une autre partie si une question bloque.

Q : Quels éléments faut-il soigner pour répondre aux attentes de notation ?

Présentez les étapes de calcul utiles, justifiez les conclusions par les propriétés étudiées et respectez les unités ainsi que les arrondis demandés. Le sujet indique le total par exercice, mais ne détaille pas la répartition des points par question.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsit.fr/assets/annales/bts-it/E2 - Mathématiques/2022/BTS IT - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Innovation Textile : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.