Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS INNOVATION TEXTILE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Probabilités et intervalle de confiance dans un magasin de vélos (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsit.fr/assets/annales/bts-it/E2 - Mathématiques/2023/BTS IT - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie l'équation différentielle et les propriétés de cette fonction, puis utilise un algorithme pour déterminer quand le tiroir est fermé.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. L'équation est donc équivalente à $(r + 1)(r + 4) = 0$. Un produit est nul si au moins l'un de ses facteurs est nul. On résout ainsi séparément les deux équations du premier degré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux racines de l'équation caractéristique sont $r = -1$ et $r = -4$.

Question 1. b. **Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en s'appuyant sur le tableau fourni.**

Le discriminant de l'équation caractéristique est positif et ses deux racines, trouvées à la question précédente, sont réelles et distinctes. D'après le tableau fourni, les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines. Les constantes sont réelles.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. **À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse initiale, déterminer f(0) et f'(0).**

Information initiale	Traduction mathématique
Distance initiale OM	$f(0) = 20$ cm
Vitesse initiale vers O	$f'(0) = -10$ cm·s^{-1}

La distance diminue lors de la fermeture, ce qui correspond bien au signe négatif de la vitesse.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À l'instant initial, $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

Deux secondes après le début de la fermeture, on évalue la fonction en remplaçant t par 2 :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

Cette expression exacte est la distance OM en centimètres. Elle vaut environ $3{,}157$ cm, mais l'énoncé demande la valeur exacte.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La distance exacte après 2 secondes est $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 3. **Le tiroir est considéré comme fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

À l'instant 4 s, la formule donne $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, soit une distance inférieure au seuil de 0,5 cm. Comme $f(0) = 20$ cm et que f est continue, elle atteint cette valeur seuil à un instant strictement antérieur à 4 s.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui. Le tiroir est fermé avant 4 secondes, car à 4 s sa distance au seuil est déjà inférieure à 0,5 cm.

Partie B - Étude de fonction

Question 1. a. **En utilisant la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Quand t tend vers $+\infty$, les deux exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Les deux exponentielles tendent donc vers 0, et leurs multiples aussi.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est 0.

Question 1. b. **En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

Une courbe représentative admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$ lorsque la fonction tend vers L à l'infini. Ici, la limite de $f(t)$ en $+\infty$ est nulle. La courbe se rapproche donc de l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Le second donne $\frac{40}{3}e^{-4t}$, car le signe négatif de son coefficient se combine avec celui de l'exposant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée étant strictement négative sur l'intervalle considéré, la fonction est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, puis sa limite en $+\infty$ est 0. Le tableau de variations reprend ces deux valeurs aux bornes de l'intervalle.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

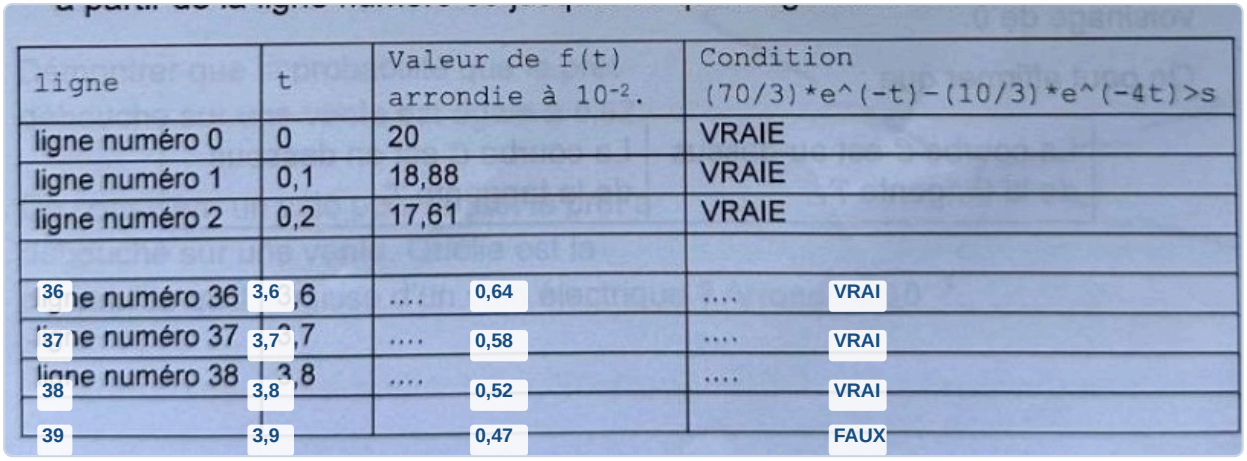
Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3. a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de f(t), arrondies à 10⁻², et le résultat du test de la condition.

À chaque passage dans la boucle, t augmente de 0,1. Le test compare la valeur de $f(t)$ au seuil 0,5 : il reste vrai à 3,8 s, puis devient faux à 3,9 s. Les valeurs de la colonne centrale sont arrondies au centième, comme demandé.

Ligne	t	$f(t)$ **arrondie à** 10^{-2}	**Test** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

Tableau de suivi complété



ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
36 ne numéro 36	3,6 ,6	 0,64	.... VRAI
37 ne numéro 37	3,7 ,7	 0,58	.... VRAI
ligne numéro 38	3,8	 0,52	.... VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39 : à $t = 3{,}9$, la condition devient fausse.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La boucle continue tant que $f(t) > 0{,}5$. À 3,8 s, ce test est encore vrai ; à 3,9 s, il est faux. L'algorithme s'arrête donc avec cette dernière valeur de t. Dans le contexte, la distance OM est alors inférieure au seuil définissant un tiroir fermé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur finale est $t = 3{,}9$ s : le tiroir est alors fermé selon le seuil de 0,5 cm.

Question 4. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La formule donne $f(0) = 20$. De plus, $f'(0) = -\frac{70}{3} + \frac{40}{3} = -10$. On remplace ces deux valeurs dans l'équation de la tangente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est $y = 20 - 10t$.

Question 4. b. Parmi les propositions, recopier la réponse exacte concernant le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

La partie régulière du développement limité à l'ordre deux est indiquée sur le document : elle comprend les termes constant, linéaire et quadratique. Il faut recopier la proposition qui ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, où $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4. c. Indiquer si, au voisinage de zéro, la courbe C est au-dessus ou en dessous de la tangente T. Aucune justification n'est demandée.

Le développement limité donne, après soustraction de la tangente, un terme principal égal à $-15t^2$. Pour les valeurs positives de t proches de 0, ce terme est négatif. La courbe se situe donc sous sa tangente au voisinage de l'origine, sur le domaine étudié.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Au voisinage de 0, la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T.

2. Probabilités et intervalle de confiance dans un magasin de vélos

Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques dans l'espoir de réaliser des ventes, puis étudie la durée de réparation de vélos. Il cherche également à estimer la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

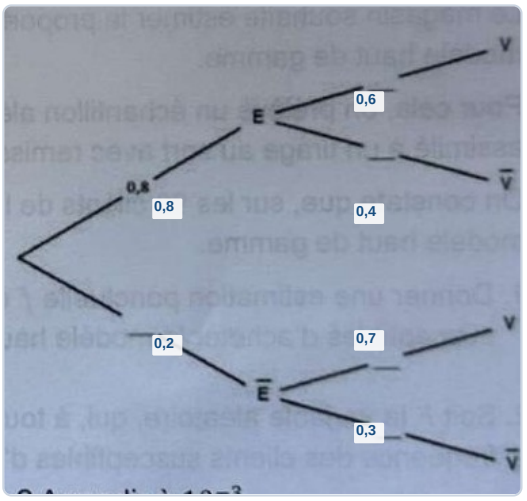
Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et le résultat du prêt, à partir des données fournies.

La première bifurcation indique le type de vélo. Depuis chaque type, les deux branches donnent les probabilités conditionnelles de vente et d'absence de vente. Chaque paire de branches issues d'un même nœud doit totaliser 1.

1. Vélo électrique : 0,8 ; vélo mécanique : 0,2.
2. Après un vélo électrique : vente 0,6 ; pas de vente 0,4.
3. Après un vélo mécanique : vente 0,7 ; pas de vente 0,3.

Les probabilités manquantes s'obtiennent par complément à 1.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

E : 0,8 ; $\bar{E}$: 0,2. Depuis E : V : 0,6, $\bar{V}$: 0,4. Depuis $\bar{E}$: V : 0,7, $\bar{V}$: 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité que le vélo choisi soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

L'événement « vélo électrique et vente » correspond au chemin qui passe d'abord par E, puis par V. On multiplie donc la probabilité de choisir un vélo électrique par la probabilité conditionnelle d'une vente après ce choix : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$. Il s'agit de la probabilité conjointe sur l'ensemble des prêts, et non d'une probabilité calculée uniquement parmi les vélos électriques.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.

Les deux cas de vente sont incompatibles : la vente suit soit le prêt d'un vélo électrique, soit celui d'un vélo mécanique. La probabilité totale d'une vente est donc la somme des probabilités des deux chemins :

- Électrique et vente : $0,8 \times 0,6 = 0,48$.
- Mécanique et vente : $0,2 \times 0,7 = 0,14$.

Ainsi, $P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(V) = 0,62$.

Question 4. Sachant qu'un prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.

On cherche la probabilité d'obtenir un vélo électrique sachant qu'il y a eu une vente. On rapporte donc la probabilité du chemin E puis V à la probabilité totale d'une vente : $P_V(E) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741935$. On arrondit cette valeur au millième, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_V(E) \approx 0,774$, soit environ 77,4 %.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres, sachant qu'elle compte, parmi 80 vélos réparés, ceux dont la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre.

Chaque réparation constitue un essai dont le succès est « nécessiter moins d'une heure de main-d'œuvre ». La probabilité de succès est 0,62, et l'échantillon compte 80 réparations. La variable X compte le nombre de succès parmi ces 80 essais. Selon le modèle binomial admis dans l'énoncé, ses paramètres sont donc le nombre d'essais et la probabilité de succès à chaque essai.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$: $n = 80$, $p = 0,62$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure vaut $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(0,38)^{40}$, car la probabilité contraire à chaque essai est $1 - 0,62 = 0,38$. Le calcul donne environ 0,00829, soit 0,008 après arrondi au millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que le nombre de vélos dont la réparation nécessite moins d'une heure soit strictement supérieur au nombre de vélos dont la réparation nécessite plus d'une heure de main-d'œuvre. Arrondir à 10^{-3}.**

Si X réparations nécessitent moins d'une heure, les autres, soit $80 - X$, sont comptées dans la catégorie opposée. La condition demandée s'écrit $X > 80 - X$, donc $X > 40$. Comme X est entier, on calcule $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40)$ avec la loi binomiale $\mathcal{B}(80; 0,62)$. La probabilité obtenue est environ 0,98092, puis s'arrondit au millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(X \geq 41) \approx 0,981$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle de la proportion p est la fréquence observée dans l'échantillon. On compte 54 clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme parmi les 90 clients interrogés. On divise donc l'effectif observé par l'effectif total : $f = \frac{54}{90} = 0,6$. La proportion estimée est ainsi de 60 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2. a. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p de clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme.**

Dans la formule fournie, on remplace f par 0,6 et n par 90. La marge d'erreur vaut $1,96\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{90}} \approx 0,10121$. On soustrait cette marge à f pour la borne inférieure et on l'ajoute pour la borne supérieure.

Borne	Calcul	Valeur arrondie
Inférieure	$0,6 - 0,10121$	0,499
Supérieure	$0,6 + 0,10121$	0,701

Les bornes sont arrondies au millième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2. b. **Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.**

Non. Le niveau de confiance de 95 % décrit la fiabilité de la méthode sur un grand nombre d'échantillons : environ 95 % des intervalles ainsi construits contiennent la proportion réelle. Pour l'échantillon étudié, cela ne permet pas d'affirmer avec certitude que p appartient à l'intervalle calculé. L'intervalle fournit une estimation, mais pas une garantie absolue.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, l'intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas avec certitude que p lui appartient.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS INNOVATION TEXTILE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points. Le coefficient est généralement 2, sauf pour Traitement des matériaux (2 options), où il est 3. Les thèmes sont la fermeture d'un tiroir, puis les probabilités et l'estimation statistique en magasin de vélos.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre $y'' + 5y' + 4y = 0$, on résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Une fonction décroissante permet de déterminer à quel moment la distance du tiroir passe sous le seuil de 0,5 cm.
- Pour des événements A et B, $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$, et P(B) se calcule en additionnant les probabilités des branches qui aboutissent à B.
- L'intervalle de confiance fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}$, où f est la fréquence observée et n la taille de l'échantillon.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser les conditions initiales f(0) et f'(0) pour déterminer les constantes de la solution différentielle.
- Dans l'algorithme, suivre le test tant qu'il est vrai et s'arrêter dès qu'il devient faux.
- Pour comparer les nombres de réparations de moins et de plus d'une heure, exprimer le second nombre comme 80 - X.
- Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas avec certitude que la proportion inconnue lui appartient.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de l'exercice sur le tiroir ?

On résout l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines déterminent la forme générale de la solution, puis les conditions f(0) et f'(0) permettent de déterminer les constantes.

Q : Comment traduire la comparaison des durées dans la loi binomiale ?

Si X vélos nécessitent moins d'une heure, les 80 - X autres nécessitent plus d'une heure. La condition demandée est $X > 80 - X$, soit $X > 40$, et sa probabilité se calcule avec la loi binomiale.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les exercices et les parties indiquées comme indépendantes peuvent être traités séparément. Répartissez le temps entre les questions, gardez une marge pour les calculs et les justifications, et vérifiez les arrondis demandés.

Q : Que signifie le niveau de confiance de 95 % dans cet exercice ?

Le niveau de 95 % caractérise la procédure utilisée pour construire l'intervalle à partir de la fréquence observée. Il ne signifie pas que l'on est certain que la proportion inconnue se trouve dans cet intervalle particulier.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsit.fr/assets/annales/bts-it/E2 - Mathématiques/2023/BTS IT - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Innovation Textile : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.